Escuela de Educación Técnica N° 1

"Raúl Scalabrini Ortiz"

Departamento de Ciencias Exactas

<u>**Módulo de problemas y ejercitación**</u>

Matemática Ciclo Superior

6° año

COMISIÓN EVALUADORA DE ALUMNOS PENDIENTES DE ACREDITACIÓN, EQUIVALENCIAS, COMPLETA NIVEL

Se debe tener en cuenta que este módulo es a modo orientativo y las actividades que lo integran son suplementarias de las carpetas de los estudiantes.

MATEMÁTICA APLICADA 6º AÑO **(Desde Agosto de 2019)**

CONTENIDOS A SER EVALUADOS EN COMISIÓN EVALUADORA DE ALUMNOS PENDIENTES DE ACREDITACIÓN, EQUIVALENCIAS, COMPLETA NIVEL

- Límites y derivadas. Regla de L´Hopital. Formas indeterminadas $1; 00$. El número *e* como límite de una sucesión.
- Aplicaciones de la derivada al estudio de funciones. Ceros de una función. Crecimiento y decrecimiento. Máximos y mínimos. Puntos de inflexión. Gráfica de una función y su derivada.
- Integrales indefinidas, racionales, trigonométricas, cíclicas. Integrales definidas. Teorema fundamental del cálculo. Regla de Barrow. Cálculo de áreas delimitadas entre funciones.

Probabilidad y Estadística Modelos matemáticos. Álgebra de sucesos. Espacios muestrales. Población y muestra. Estadística descriptiva e inferencia estadística. Diagramas de distribuciones.

LIMITES INDETERMINADOS

1.- Indicar tipo de indeterminación y hallar los siguientes limites, casos $\frac{0}{0}$; $\infty - \infty$; $\frac{\infty}{\infty}$; $0.\infty$, en caso de no ser indeterminados justificar por qué.

a.- $\lim_{x \to 3} \frac{x^2 - 9}{x - 3}$

b.- $\lim_{x \to 2^+} \left(\frac{1}{x^2 - 4} - \frac{1}{x - 2} \right)$

c.- $\lim_{x \to 1} \frac{6x^2 + 12x - 18}{2x - 2}$

d.- $\lim_{t \to 3} \frac{t - 3}{\sqrt{t + 1} - 2}$

e.- $\lim_{x \to +\infty} \frac{x^3 + 3x^2 + x^4 + 1}{x + x^3 - 3}$

f.- $\lim_{x \to 3} \frac{3 - x}{(x - 3)^3}$

g.- $\lim_{x \to +\infty} \frac{x^3 + 3x^2 - 1}{5x^3 + 2x - 2}$

h.- $\lim_{x \to -3} (x^2 + 6x + 9).\frac{1}{x + 3}$

i.- $\lim_{x \to 2} (x - 2).\frac{1}{x^2 - 4}$

j.- $\lim_{x \to \frac{\pi}{2}} \left(\frac{1}{\cos x} - \operatorname{tg} x \right)$

k.- $\lim_{x \to 2} \frac{x^2 - 4}{x - 2}$

l.- $\lim_{x \to 3^+} \frac{x+2}{3-x}$

m.- $\lim_{x \to 2^+} \frac{1-x}{x^2-3x+2}$

n.- $\lim_{x \to 3^-} \frac{x+5}{x^2-3x}$

o.- $\lim_{x \to -4} \frac{x}{(x+4)^2}$

p.- $\lim_{x \to 2} \frac{x^2+5}{x^2-4x+4}$

q.- $\lim_{x \to 5} \frac{x-5}{x^2-25}$

r.- $\lim_{x \to 5} \frac{x-5}{x^2+25}$

s.- $\lim_{x \to 5} \frac{x+5}{x^2-25}$

t.- $\lim_{x \to 4} \frac{\sqrt{x-2} - \sqrt{2}}{x^2-16}$

u.- $\lim_{x \to 6} \frac{\sqrt{x-2} - \sqrt{2}}{x^2-16}$

v.- $\lim_{x \to 5} \frac{x^3-5x^2+x-15}{x^2+3x-40}$

w.- $\lim_{x \to -8} \frac{2x^2+10x-48}{3x^2+9x-120}$

x.- $\lim_{h \to 0} \frac{(x+h)^3-x^3}{h}$

y.- Si tienen que resolver el límite de una función racional donde el numerador y el denominador tienden a cero, ¿es siempre posible factorear numerador y denominador, y simplificar? ¿Por qué?.

2.- Resolver aplicando Regla de L´Hopital, recordando que:

> **Teorema.** Regla de L'Hospital: Si $f(x)$ y $g(x)$ son funciones continuas en un entorno de a, es decir, en un intervalo alrededor del punto, salvo quizás en el punto a, y con derivadas continuas en dicho entorno, siendo $g'(x) \neq 0$ cerca de a, $\lim_{x \to a} f(x) = \lim_{x \to a} g(x) = 0$ y existe el $\lim_{x \to a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$ entonces el limite $\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$.

a.- $\lim_{x \to 3} \frac{\sqrt{2x+10}-4}{x-3}$

b.- $\lim_{x \to 2} \frac{x^2-4}{x^2-2x}$

c.- $\lim_{x \to 0} \frac{\text{sen}3x}{2x}$

d.- $\lim_{x \to 4} \frac{\sqrt{x^2+9}-5}{\ln(x-3)}$

e.- $\lim_{x \to 0} \frac{\ln(1+x)}{\text{sen}(3x)}$

f.- $\lim_{x \to 4} \frac{\sqrt{x^2+9}-5}{\ln(x-3)}$

g.- $\lim_{x \to \infty} \frac{8x^2+5x+9}{3x^2+9x-2}$

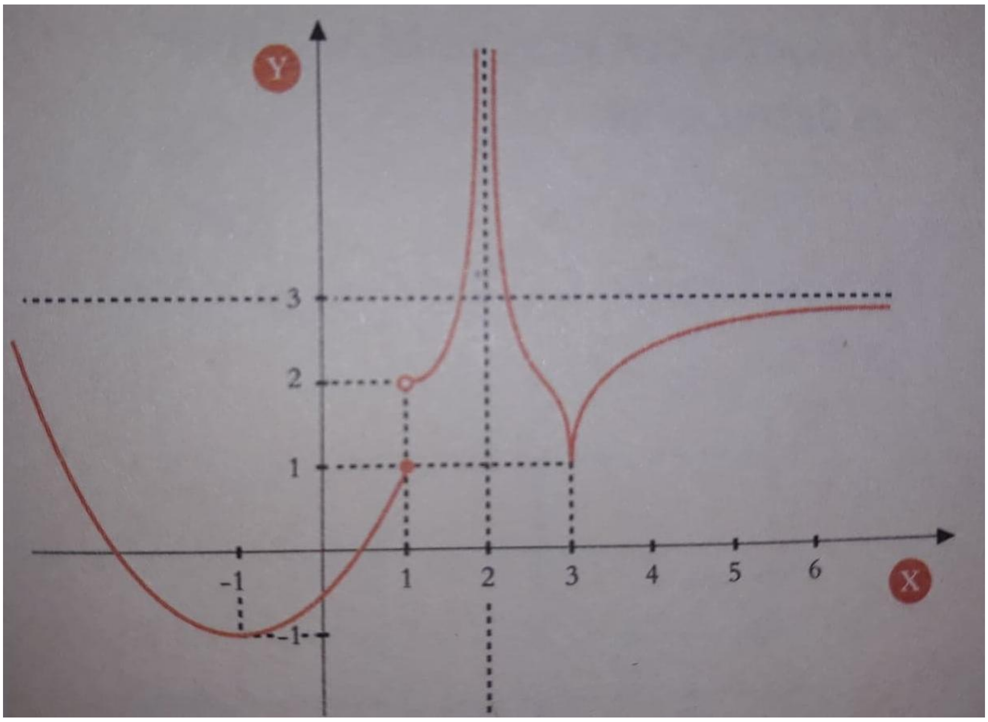
h.- Calcular el siguiente limite: $\lim_{x \to \infty} \frac{2x-3\,sen\,x}{x+sen\,x}$, y explicar porque no se puede utilizar la regla de L´Hopital para realizar el caculo.

i.- Obtener el valor de los siguientes límites:

- $\lim_{x \to 0} \frac{e^x-1}{2\,sen\,(5x)}$
- $\lim_{x \to 1} \frac{\ln x}{sen\,(\pi x)}$
- $\lim_{x \to 0} \frac{x\,sen\,x}{x\,cosx+sen\,x-2x}$
- Hallar el valor de $\lim_{x \to 0} \frac{f(x)-2}{5x}$; considerando que f(0) = 2 y f´(0) = $\frac{5}{6}$
- $\lim_{x \to +\infty} x^{-2} \ln x$
- $\lim_{x \to +\infty} \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$

APLICACIÓNES DE LAS DERIVADAS

1.- El gráfico que figura a continuación corresponde a la función f(x).



Observando el gráfico de f(x), contestar las siguientes preguntas:

a.- ¿Cuál es el dominio de f(x)?

b.- ¿En qué valores de x la función no es continua? ¿Qué tipo de discontinuidad tiene f(x) en esos valores?

c.- ¿Cuáles son los valores de x en los cuales la función no es derivable?

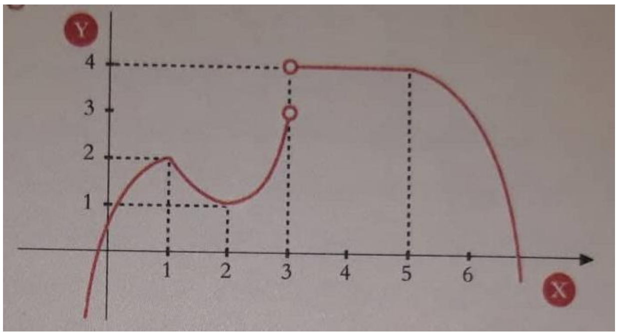
d.- ¿Para qué valores de x la función derivada en f(x) es 0?

e.- ¿En qué valores de x la función f(x) tiene máximos o mínimos relativos?

f.- ¿Cuáles son los intervalos de crecimiento y de decrecimiento de f(x)?

2.- Una función f(x) tiene el siguiente grafico:

A partir del grafico de f(x), determinen:

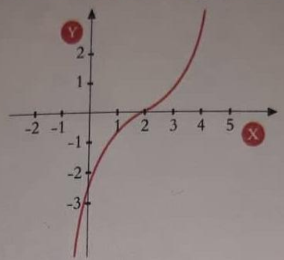


a.- Los valores de x para los cuales, f´(x) > 0.

b.- Los valores de x para los cuales, f´(x) < 0.

c.- Los extremos relativos de f(x).

3. El gráfico de la función derivada de una función f(x) es el siguiente:



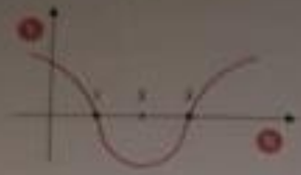
Observando el gráfico, decidan si cada una de las siguientes afirmaciones es verdadera o falsa. Justifiquen sus respuestas.

a. La función f(x) es creciente en ℝ.

---

b. En x = 2, la función f(x) tiene un mínimo relativo.

4. El gráfico que figura a continuación corresponde a la función derivada de una función f(x).



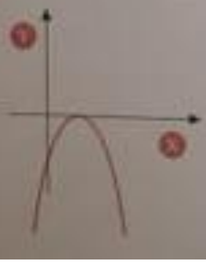
Analizando el gráfico obtengan:

a. Los intervalos de crecimiento y de decrecimiento de f(x).

---

b. Los valores de x en los cuales la función f(x) tiene máximos o mínimos relativos.

5. Determinen si el siguiente gráfico puede ser el de la función derivada de una función que es decreciente en todo su dominio. Justifiquen su respuesta.



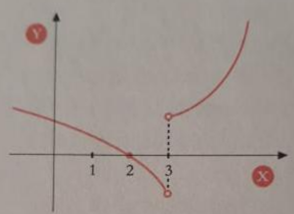
6.- Para cada una de las funciones que se indican, hallen el dominio, los intervalos de positividad y de negatividad, los intervalos de crecimiento y de decrecimiento, y los máximos y mínimos relativos.

a.- $f(x) = x^5 - 8\,x^2$

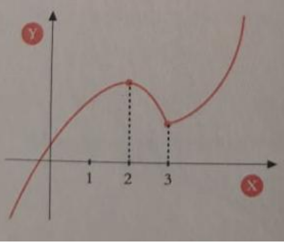
b.- $g(x) = (x-2)^2(x+1)^2$

c.- $h(x) = 2x^3 + 4x^2 - 2x - 4$

7. Consideren el siguiente gráfico que corresponde a una función $f'(x)$, es decir, a la función derivada de $f(x)$.



¿Es posible que el gráfico de la función $f(x)$ sea el que figura a continuación? Justifiquen su respuesta.



8.- Si la función f(x) es derivable y creciente en todos los números reales y la función g(x) es $g(x) = f\,(x^2\text{-}12x)$, determinar los intervalos de crecimiento y de decrecimiento de g(x).

9.- Calcular los valores de a, b y c si se verifica que la función $f(x) = ax + b + c.\ e^{-x}$ tiene un extremo relativo en x=0 y $f'(\ln 2) = 6$

10.- a.- Determinar los intervalos de concavidad de las funciones de la actividad 6.

b.- Graficar aproximadamente cada una de las funciones anteriores utilizando la información obtenida en el ítem a, y en la actividad 6.

11. Grafiquen una función $f(x)$ que tenga como dominio a $\text{Dom } f = \mathbb{R} - \{-3\}$, que sea derivable en todos los valores de su dominio y que verifique simultáneamente las siguientes condiciones:

$f(2) = 0$, $f(5) = 0$,

$\lim\limits_{x \to -3^-} f(x) = +\infty$, $\lim\limits_{x \to -3^+} f(x) = -\infty$,

$\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = -\infty$, $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = +\infty$,

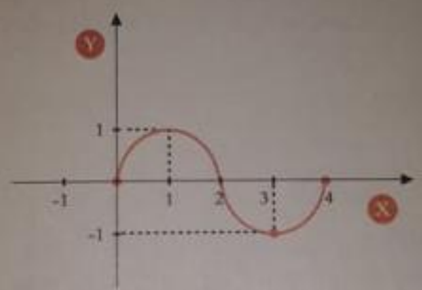
$f'(x) > 0$ en $(-\infty; -3) \cup (-3\,; 3)$,

$f'(x) < 0$ en $(3; +\infty)$,

$f''(x) > 0$ en $(-\infty; -3) \cup (1; 2{,}5)$ y

$f''(x) < 0$ en $(-3; 1) \cup (2{,}5; +\infty)$.

12. Si la función $h(x) = [f(x)]^2 - 1$ está definida en el intervalo $[0; 4]$ y el gráfico de $f(x)$ es el que figura a continuación, obtengan los intervalos de crecimiento y decrecimiento, y los máximos y mínimos relativos de $h(x)$.



11.- Consideren la función $g(x)\,\frac{4x+3}{x^2+2}$ y determinen lo siguiente:

a.- Dominio de g(x).
b.- Las asíntotas verticales, horizontales y oblicuas, si existen.
c.- Los ceros de la función y los intervalos de positividad y negatividad
d.- Los intervalos de crecimiento y decrecimiento, los máximos y los mínimos.
e.- Los intervalos de concavidad.
f.- Un grafico aproximado de g(x).

INTEGRALES

1.- Para un móvil que parte del reposo, la función v(t) = 9t permite determinar su velocidad (v), medida en kilómetros por hora, respecto del tiempo de marcha (t) medido en horas.
a.- ¿Cuál es la velocidad del móvil después de las 15 horas continuas de marcha?
b.- Encuentren una función que permita calcular el espacio recorrido por el móvil después de t horas de marcha.
c.- ¿Cuántos kilómetros recorre el móvil después de 15 horas de estar en continuo movimiento?

2.- Para cada uno de los siguientes casos, verifiquen si f(x) es o no una función primitiva de f(x)

a.- f(x) = $\frac{x^4}{4}$ f(x) = x^3

b.- f(x) = $e^x\, lnx + 2$ f(x) = $\frac{e^x}{x}$

c.- f(x) = $3x^5$ -8 x^2 + 9x +7 f(x) = $15x^4$ - 16x +9

d.- f(x) = $\frac{x^2+3x+1}{x^3-2}$ f(x) = $\frac{2x+3}{3x^2}$

3. Determinen si alguna de las siguientes funciones es una función primitiva de $g(x) = x^2$ sen x.

a. $G(x) = 2x \cos x$

b. $G(x) = -x^2 \cos x + 2x \operatorname{sen} x + 2 \cos x + 8$

c. $G(x) = 2x \cos x - 5$

d. $G(x) = \frac{x^3}{3}\,(-\cos x)$

e. $G(x) = 2x \operatorname{sen} x - x^2 \cos x + 2 \cos x$

4. Encuentren una función F(x) que sea una primitiva de $f(x) = \frac{5x^2 + \sqrt{x} + 2}{x^3}$ y que además verifique que F(1) = 8.

5. Obtengan una función H(x) que cumpla las siguientes condiciones: la función H(x) es una primitiva de $h(x) = \frac{x^3 + 2\sqrt{x^3} + x}{x^3}$ y el punto (4; 5) pertenece a H(x).

6. Hallen las funciones primitivas de las siguientes funciones:

a. $a(x) = e^x - \operatorname{sen} x + \sqrt[4]{x}$

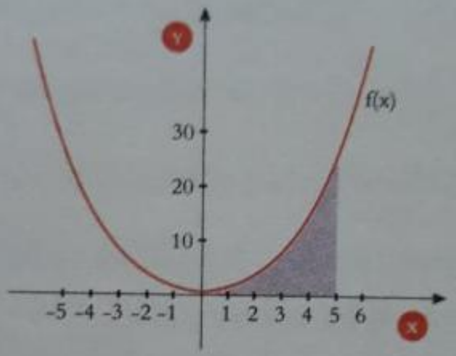
b. $b(x) = \dfrac{x \operatorname{sen} x + \sqrt[3]{x^2} + 2}{x}$

c. $c(x) = 7x^8 - 5x^7 + 2x^6 - 10x^3 + 6x^2 +$
$+ 3x + 9$

d. $d(x) = \dfrac{1}{\sqrt[5]{x^2}}$

e. $e(x) = (1 + \sqrt{x})(x^2 + \sqrt[3]{x} - 1)$

7. Consideren el siguiente gráfico en el cual es $f(x) = x^2$.

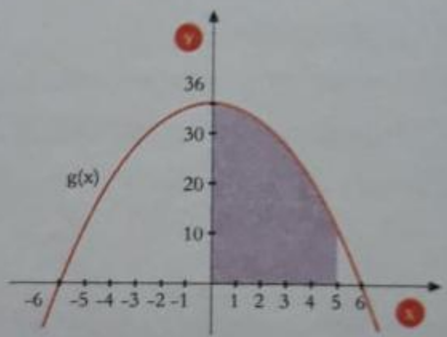


Encuentren una aproximación por defecto del área de la figura sombreada para cada uno de estos casos:

a. Dividiendo el intervalo [0; 5] en cinco subintervalos de igual longitud.

b. Dividiendo el intervalo [0; 5] en diez subintervalos de igual longitud.

8. En el gráfico que figura a continuación, la región sombreada está debajo de la función $g(x) = -x^2 + 36$.



Obtengan una aproximación por exceso del área de la región sombreada de cada una de las siguientes maneras:

a. Dividiendo el intervalo [0; 5] en cinco subintervalos de igual longitud.

b. Dividiendo el intervalo [0; 5] en diez subintervalos de igual longitud.

9. Calculen la función derivada de las siguientes funciones:

a. $A(t) = \int_0^t x^4 dx$

b. $B(t) = \int_0^t x^3 dx$

c. $C(t) = \int_0^{t^2} \cos x \, dx$

10. Hallen los valores de **t** en los cuales las siguientes funciones tienen máximos o mínimos relativos.

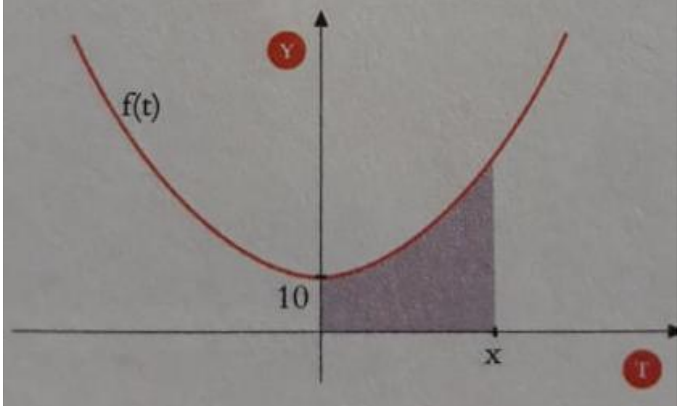
a. $H(t) = \int_1^t (x-1)^4 (x+5)^5 \, dx$

b. $J(t) = \int_0^t (x^2 - 6x + 8) dx$

11. Para cada uno de los siguientes casos, grafiquen la función f(x) y hallen el área de la región determinada por el gráfico de f(x) con el eje **x**.

a. $f(x) = -x^2 + 5x - 6$

12. El gráfico que figura a continuación es $f(t) = t^2 + 10$. Encuentren la función que permita calcular el área de la región sombreada para cualquier valor de **x**.



13. Calculen el valor de **a** si $a < 8$ y el área de la región encerrada por el gráfico de $g(x) = x^2 + 1$, el eje **x**, $x = a$ y $x = 8$ es de $\frac{532}{3}$.

17. Grafiquen la región comprendida entre el gráfico de $f(x) = 4x$, el de $g(x) = \frac{1}{x}$, $x = e$ y el eje **x**. Hallen además el área de la región anterior.

15. Calculen las siguientes integrales definidas:

a. $\int_0^{\pi} \cos x \, dx =$

____

____

b. $\int_1^3 (6 + 7x^3) \, dx =$

____

____

c. $\int_{-\pi}^{\pi} \operatorname{sen} x \, dx =$

____

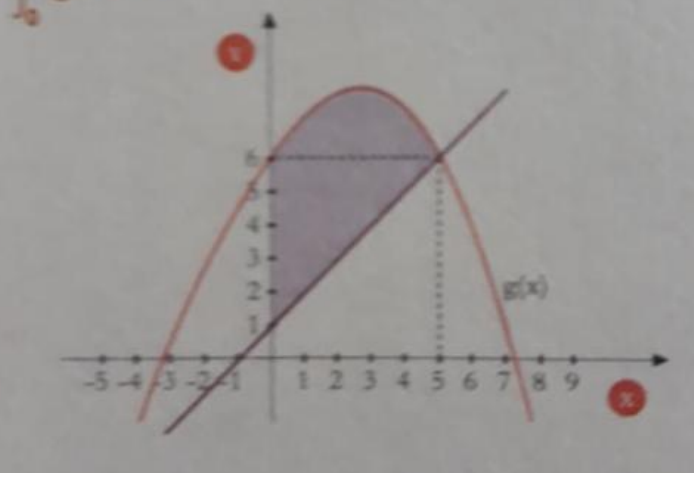
____

16. Para cada uno de los casos que se indican a continuación, determinen si la integral definida $\int_a^b f(x)dx$ coincide con el área de la región comprendida entre el gráfico de $f(x)$, el eje **x**, $x = a$ y $x = b$. Justifiquen sus respuestas.

a. $f(x) = \sqrt{x} - 3$, $a = 0$ y $b = 9$

18. Considerando que el área de la siguiente región sombreada es 25, calculen el siguiente valor:

$$\int_0^5 g(x)dx$$



19. Teniendo en cuenta que para la región sombreada siguiente el área es 5 y que $g(x)$ es una función cuadrática, obtengan el siguiente valor:

$$\int_{-1}^{3} h(x)dx$$